

Notes du chapitre V Filtres numériques.

David Savéry

Version du 10 avril 2002

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons les problèmes d'implantation, et de synthèse de filtres numériques.

Schématiquement, on utilise souvent les filtres numériques à deux fins. Un filtrage peut d'abord être utilisé pour éliminer, ou au contraire pour faire ressortir certaines composantes d'intérêt d'un signal temporel. Les filtres passe-bas permettent ainsi de faire ressortir les grands traits d'un phénomène à variation lente du bruit de mesure, les filtres coupe-bandes permettent de se débarrasser des perturbations à bandes fréquentielles limitées, telles que les perturbations électromagnétiques à 60 Hz créées par le secteur.

Les filtres peuvent ensuite être utilisés pour modéliser l'effet d'un système de mesure, de reproduction ou de transmission d'un phénomène physique. Cette approche est la base de la théorie des systèmes. Les systèmes d'imagerie (télédétection, imagerie médicale, optiques), sonores ou vocaux (acoustique architecturale), de mesure de débit ou de pression, les systèmes physiologiques, etc... peuvent être modélisables en première approximation par ce type d'approche "boîte noire" linéaire. La synthèse de parole, d'effets sonores spatiaux peuvent également être vues comme des problèmes d'identification de filtres.

Ce chapitre s'articule autour des points suivants. Dans un premier temps, nous nous soucierons des méthodes de calcul de la sortie d'un filtre identifié par sa réponse impulsionnelle et excité par un signal connu. Dans un deuxième temps, nous exposerons des méthodes de détermination de la fonction de transfert d'un filtre obéissant à un cahier des charges ("gabarit") fixé à l'avance. Les méthodes de synthèse de filtre étant innombrables, ce cours ne sera qu'un aperçu succinct des méthodes existantes.

2 Structure des filtres récurrents

Supposons que nous ayons à réaliser un filtre numérique (H) caractérisé par une relation entrée-sortie récurrente du type :

$$y_n = \sum_{k=1}^N a_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k}$$

Les coefficients $(a_k)_{k=1\dots N}$ correspondent à la partie *autorégressive* de la relation récurrente, tandis que les $(b_k)_{k=0\dots M}$ définissent sa partie *transverse*. La transformée en z de la réponse impulsionnelle du filtre (*fonction de transfert*) est la fraction rationnelle donnée par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$

Lorsque le filtre est réalisable, sa zone de convergence est du type $\mathcal{R}_h = \{z/|z| > R_{max}\}$, $R_{max} < 1$ étant le module maximal des pôles de $H(z)$. Il existe une infinité de moyens algorithmiques pour calculer la sortie du filtre par programmation, par exemple, d'un processeur spécialisé (DSP, Digital Signal Processor). Nous représenterons une telle structure par son graphe de fluence.

2.1 Opérateurs élémentaires, graphe de fluence

Les opérations élémentaires que l'on suppose savoir effectuer sont les suivantes :

- l'addition de deux séquences,
- la multiplication d'une séquence par une constante,
- l'opérateur de retard $(x_n) \rightarrow (x_{n-1})$, qui nécessite l'utilisation d'une case mémoire (registre d'un DSP).

Pour représenter un algorithme de calcul d'un filtre, on utilise la notion de graphe de fluence, graphe pour lequel les noeuds représentent les étapes de calcul et pour lequel les branches valuées et orientées symbolisent une des trois opérations élémentaires. Une convergence de plusieurs branches vers un seul noeud représente une addition. La multiplication par une constante a est représentée par la valeur a de la branche, tandis que le retard sera figuré par z^{-1} .

Deux noeuds particuliers existent dans le graphe de fluence : le noeud d'entrée de (x_n) et le noeud de sortie de (y_n) . À une relation entrée-sortie spécifiée par les coefficients (a_k) et (b_k) peuvent correspondre plusieurs graphes et donc plusieurs implémentations possibles. Suivant le critère de performance recherché, une architecture particulière de graphe pourra se révéler optimale. Dans la suite, pour représenter l'architecture du filtre (H), on supposera, sans perte de généralité, que $N = M$.

2.2 Optimalité de l'architecture

2.2.1 Formes directes I et II

L'implémentation la plus simple du filtre (H) est donnée par la figure 5. Elle est dénommée forme directe I. Elle fait ressortir les deux parties, transverse et autoregressive, du filtre. Cette architecture a plusieurs défauts. En particulier on peut remarquer qu'elle nécessite l'utilisation de $2M$ délais. La simple constatation que les parties transverse et autorégressive du filtre peuvent être permutées donnent la forme directe II qui économise M registres.

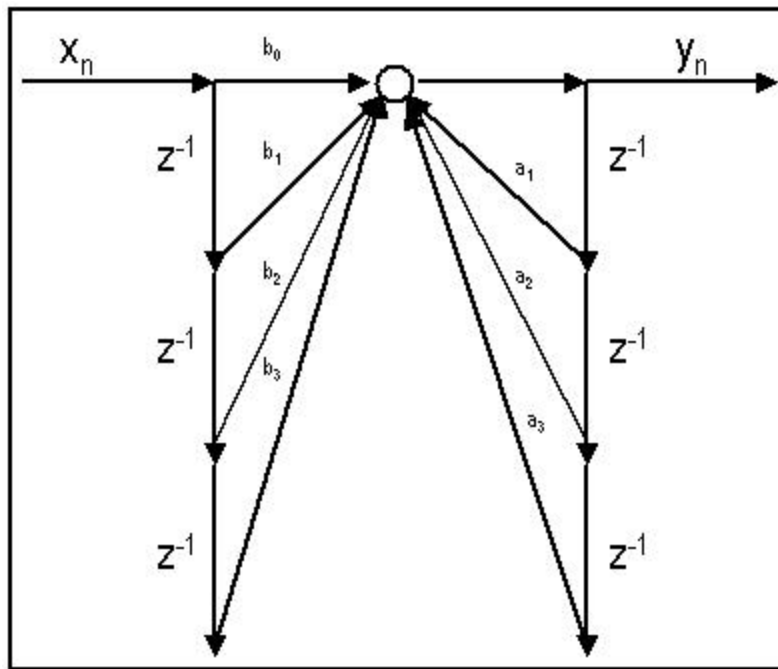


FIG. 1 – *Forme directe I d'un filtre*

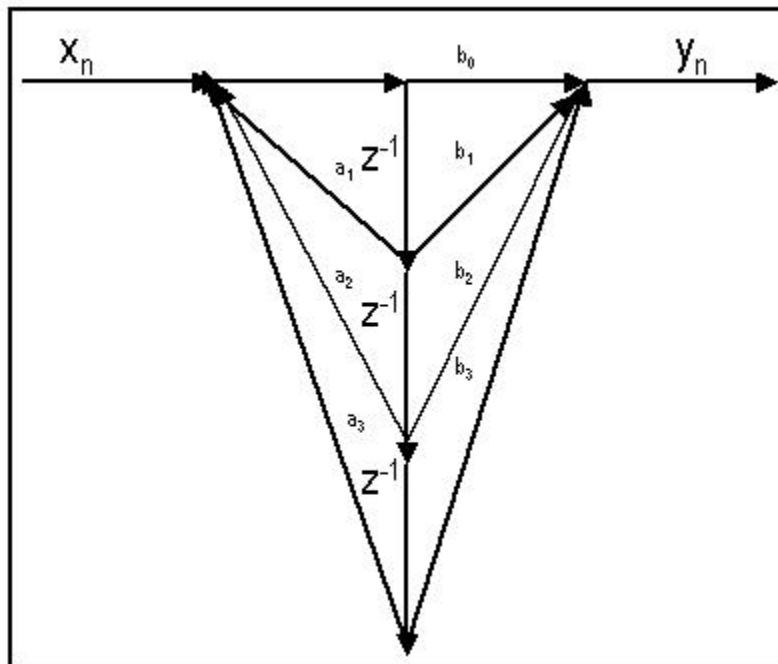


FIG. 2 – *Forme directe II d'un filtre*

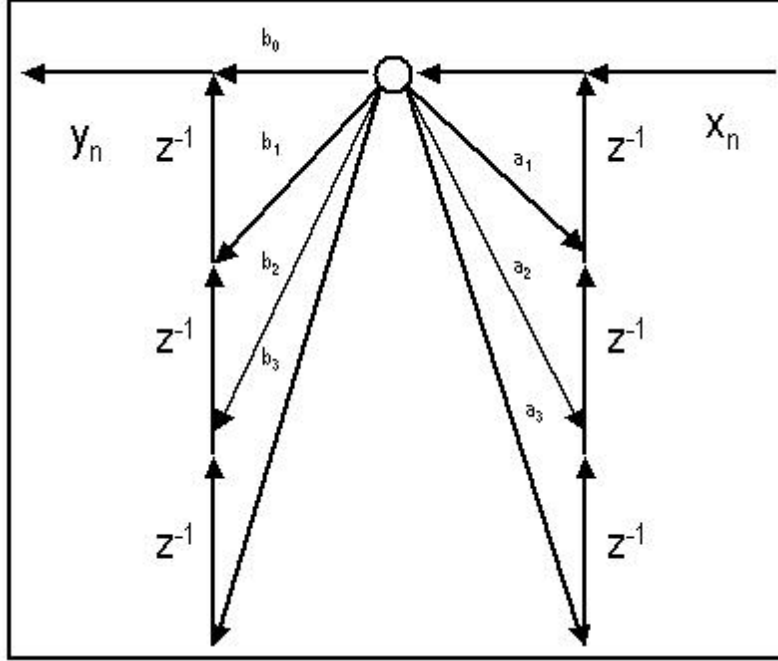


FIG. 3 – *Forme transposée I d'un filtre*

2.2.2 Formes transposées I et II

Un résultat de la théorie des graphes est le théorème de transposition. Ce théorème stipule que si l'on construit le graphe transposé d'une structure de graphe, la fonction de transfert du système ne change pas. On transpose un graphe donné en changeant le sens de ses branches et en intervertissant entrée et sortie du réseau. On peut alors associer aux formes directes I et II les formes transposées I et II. Quelle architecture de filtre est alors la plus efficace? Nous avons vu qu'utiliser les formes II permet d'économiser de la mémoire. Un autre aspect du calcul numérique est la quantification des valeurs manipulées : un processeur manipule des nombres avec une précision finie. Il se trouve que la forme transposée II occasionne souvent moins d'erreurs arithmétiques (exemple : soustraction de très grand nombres qui donne des résultats imprévisibles) et est ainsi plus utilisée que les autres formes d'implémentation (Matlab en particulier utilise cette architecture).

3 Filtrage par FFT

La rapidité de l'algorithme de FFT et de FFT inverse permet d'envisager d'utiliser l'équivalence convolution et multiplication dans le domaine fréquentiel pour l'implémenter informatiquement un filtre. Supposons que l'on ait deux séquences à convoluer. Ces algorithmes permettent en fait d'effectuer la convolution circulaire de ces séquences, qui peut différer de la convolution classique, comme nous allons le montrer.

3.1 Convolution circulaire

Soient $(x_0, \dots, x_{N-1})$ et $(h_0, \dots, h_{N-1})$, deux séquences finies de même longueur et $(X(0), \dots, X(N-1))$, $(H(0), \dots, H(N-1))$ leurs TFD. Cherchons la TFD inverse $(y_0, \dots, y_{N-1})$ du produit des deux

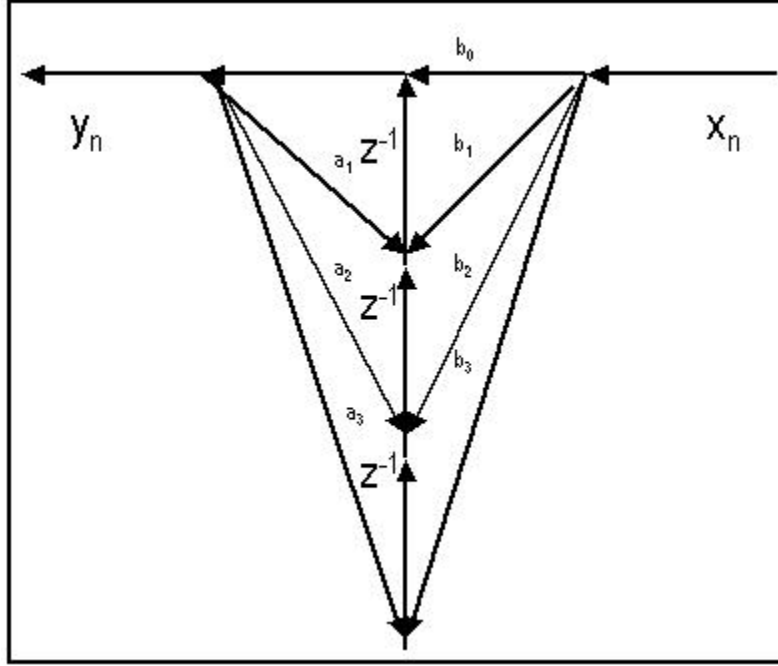


FIG. 4 – *Forme transposée II d'un filtre*

TFD $(H(0)X(0), \dots, H(N-1)X(N-1))$:

$$\begin{aligned}
 H(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} h_m e^{-2i\pi \frac{km}{N}} \\
 X(k) &= \sum_{p=0}^{N-1} x_p e^{-2i\pi \frac{kp}{N}} \\
 H(k)X(k) &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_p e^{-2i\pi \frac{k(p+m)}{N}} \\
 y_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)X(k) e^{2i\pi \frac{kn}{N}} \\
 y_n &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_p \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{k(-p-m+n)}{N}}
 \end{aligned}$$

Si on utilise l'identité $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{k(-p-m+n)}{N}} = 1$ si $m+p-n$ est un multiple de N et 0 sinon, on peut écrire :

$$\forall n = 0 \dots N-1, y_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_m \bar{x}_{n-m},$$

expression dans laquelle $(\bar{x}_n)$ est la séquence infinie déduite de $(x_0, \dots, x_{N-1})$ par périodisation de N , i.e. :

$$\bar{x}_n = \sum_{p=0}^{N-1} x_p \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta[lN + p - n] = x[n \text{ modulo } N].$$

On en déduit que $(y_0, \dots, y_{N-1})$ est la *convolution circulaire* de (h_n) et de (x_n) , définie comme la convolution classique d'une des séquences finies par la deuxième périodisée.

3.2 Convolution circulaire vs. convolution

Cette périodisation entraîne des effets de bord qui demande une certaine prudence lors de son interprétation comme convolution classique. Un bourrage de zéros permet d'éviter ces effets de bord. Ainsi, si l'on a à convoluer deux séquences finies de longueurs respectives N_h et N_x , on bourrera de zéros les deux séquences pour obtenir des vecteurs de longueurs $N_h + N_x - 1$, puis on effectuera une convolution circulaire sur ces deux vecteurs rallongés pour obtenir $(x_n) * (h_n)$ sur l'intervalle $[0, N_h + N_x - 1]$.

4 Synthèse de filtres : quelques techniques

Nous cherchons à concevoir un filtre qui obéit à un certain cahier des charges : un rejet des fréquences supérieures à une fréquence de coupure donnée, ou d'une bande de fréquences parasites, etc Il s'agit donc de choisir à partir de ces spécifications, la fonction de transfert $H(z)$ adéquate, que l'on cherche sous forme d'une fraction rationnelle en z . On supposera que la fréquence d'échantillonnage est de 1 Hz. Les contraintes de stabilité et de causalité requièrent que les pôles de H soient dans le cercle unité. De nombreuses méthodes existent alors : nous nous contenterons d'exposer les principes de quelques méthodes classiques.

4.1 Principes de la synthèse de filtres

On spécifie souvent les caractéristiques désirées d'un filtre sous la forme d'un gabarit portant sur son spectre d'énergie. Dans un tel gabarit, on se donne :

- une bande passante et une tolérance δ_1 pour laquelle $||H(\nu)| - 1| \leq \delta_1$,
- une bande de rejet et une tolérance δ_2 pour laquelle $|H(\nu)| \leq \delta_2$.

Les contraintes sur la phase seront examinées dans le design spécifique des filtres RIF.

4.2 Filtres analogiques classiques

L'approche traditionnelle de la synthèse de filtres numériques est de partir d'un filtre analogique à fonction de transfert analogique (transformée de Laplace) connue et d'en déduire, par une méthode à définir, la fonction de transfert $H(z)$ d'un filtre numérique équivalent. Dans un premier temps, nous rappelons les propriétés de trois types de filtres analogiques classiques.

4.2.1 Filtre de Butterworth

Un filtre passe-pas analogique de Butterworth d'ordre N et de fréquence de coupure f_c (à -3 dB) a pour spectre d'énergie :

$$|H_a(\nu)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\nu}{f_c})^{2N}}.$$

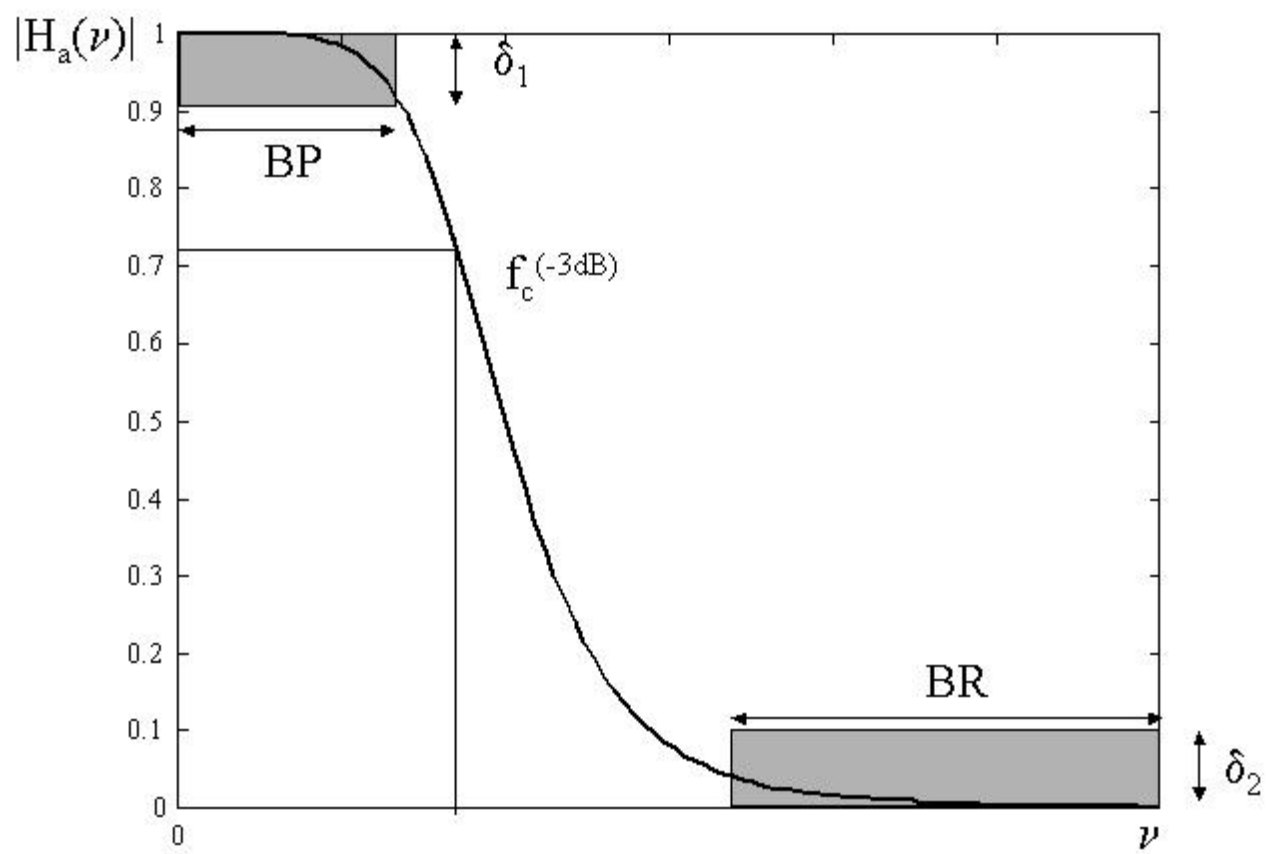


FIG. 5 – Gabarit du spectre d'énergie d'un filtre passe-bas

On exprime cette égalité de manière équivalente dans tout le domaine de Laplace :

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + (s/2i\pi f_c)^{2N}}.$$

On cherche alors la fonction de transfert $H_a(s)$ qui satisfait cette condition et qui a ses pôles à gauche de l'axe imaginaire. Dans ce cas, la fonction de transfert du filtre s'écrit sous la forme :

$$H_a(s) = \frac{(2\pi f_c)^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)} = \frac{(2\pi f_c)^N}{s^N + A_{N-1}s^{N-1} + \dots + A_0},$$

Avec $s_k = 2\pi f_c e^{2i\pi(\frac{N+1}{2N} + \frac{k}{2N})}$, tandis que les A_k (tabulés lorsque $2\pi f_c = 1$) sont calculables par développement du dénominateur. Les s_k sont situés sur le demi-cercle de rayon $2\pi f_c$, à gauche de l'axe imaginaire.

Le filtre analogique de Butterworth dispose des propriétés suivantes :

- Son spectre d'énergie est maximalelement plat dans sa bande passante. Ses $(2N - 1)$ premières dérivées sont nulles en 0,
- son spectre est monotone,
- lorsque N croît, le spectre d'énergie se rapproche d'un filtre analogique passe-bas idéal (bande passante $[0, f_c[$, tolérance $\delta_1 = 0$, bande de rejet $]f_c, +\infty[$, tolérance $\delta_2 = 0$), au prix d'une complexité et d'un coût plus grand.

4.2.2 Filtres de Chebychev

Le filtre passe-bas de Chebychev d'ordre N a un spectre d'énergie donné par :

$$|H_a(\nu)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_N^2(\frac{\nu}{f_c})},$$

où $C_N(x)$ est le polynôme de Chebyshev¹ de degré N défini par $\forall \theta, C_N(\cos \theta) = \cos n\theta$. On peut également trouver un $H_a(s)$ stable ayant un tel spectre d'énergie. Les pôles se situent à gauche de l'axe imaginaire et sur une ellipse centrée dont les axes dépendent de ϵ .

Comparé au filtre de Butterworth, le filtre de Chebyshev a les propriétés suivantes :

- Le filtre de Chebyshev donne une meilleure approximation que le filtre de Butterworth à un ordre N donné du spectre passe-pas idéal sur tout l'axe des fréquences,
- son spectre oscille dans la bande passante. On parle d'une oscillation uniforme (equiripple) qui dépend de ϵ . La tolérance δ_1 dans la bande passante $[0, f_c]$ est lié à ϵ ,
- le spectre est monotone dans la bande de rejet,
- la zone de transition est plus abrupte que pour le filtre de Butterworth.

4.2.3 Filtres elliptiques

Le filtre elliptique² d'ordre N est encore une meilleure approximation du filtre passe-bas idéal que le filtre de Chebyshev d'ordre N . Il fluctue non seulement dans la bande passante mais également dans la bande de rejet, tandis qu'il dispose d'une zone de transition très rapide. On les caractérisera par leur ordre, leur fréquence de coupure, l'oscillation dans la bande passante et l'oscillation dans la bande de rejet.

1. $C_0(x) = 1, C_1(x) = x, C_2(x) = 2x^2 - 1, \dots$

2. Pour plus de détails, on pourra se reporter au cours d'analyse des signaux, M. Corinthios, École Polytechnique de Montréal.

4.3 Transformation d'un filtre passe-bas analogique en un filtre analogique de gabarit quelconque

Soit $H_0(s)$ la fonction de transfert, connue, d'un filtre analogique passe-bas de fréquence de coupure f_0 . On cherche dans un premier temps à réaliser un filtre passe-bande $H_{pb}(s)$ à partir de H_0 . Pour cela nous chercherons une transformation $s' = G(s)$ du plan complexe telle que $H_{pb}(s) = H_0(s') = H_0(G(s))$, qui envoie l'axe imaginaire sur lui-même. Pour que $H_{pb}(s)$ soit une fraction rationnelle en s , on cherchera $G(s)$ également sous la forme d'une fraction.

Supposons que l'on cherche à obtenir un filtre de bande passante $[f_b, f_h]$ telle que $f_b f_h = f_c^2$ et $f_h - f_b = \beta f_c$. On veut alors que $G(s)$ satisfasse aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow 0} G(2i\pi\nu) &= -i\infty \\ G(2i\pi f_b) &= -2i\pi f_0 \\ G(2i\pi f_c) &= 0 \\ \lim_{\nu \rightarrow +\infty} G(2i\pi\nu) &= +i\infty \\ G(2i\pi f_h) &= 2i\pi f_0 \end{aligned}$$

Une fraction rationnelle simple qui satisfait à ces critères est

$$G(s) = \frac{f_0}{\beta f_c} \frac{s^2 + 4\pi^2 f_c^2}{s}.$$

La fonction de transfert recherchée aura donc pour expression :

$$H_{pb}(s) = H_0\left(\frac{f_0}{\beta f_c} \frac{s^2 + 4\pi^2 f_c^2}{s}\right).$$

On peut utiliser la même approche pour synthétiser filtres passe-haut, ou coupe-bande à partir de H_0 .

Ainsi, pour obtenir un filtre passe-haut de fréquence de coupure f_1 à partir d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_0 on fait le changement de variable :

$$G(s) = \frac{4\pi^2 f_0 f_1}{s}.$$

Tandis que pour un coupe-bande de fréquence centrale f_c et de largeur βf_c , on combine les résultats précédents pour trouver :

$$G(s) = \frac{4\pi^2 \beta f_0 f_c s}{s^2 + 4\pi^2 f_c^2}.$$

Transformation passe-bas de coupure f_0 en :	$G(s)$
Passe-haut de coupure f_1	$\frac{4\pi^2 f_0 f_1}{s}$
Passe-bande, fréquence centrale f_c , largeur normalisée β .	$\frac{f_0}{\beta f_c} \frac{s^2 + 4\pi^2 f_c^2}{s}$
Coupe-bande, fréquence centrale f_c , largeur normalisée β .	$\frac{4\pi^2 \beta f_0 f_c s}{s^2 + 4\pi^2 f_c^2}$

4.4 Transformation d'un filtre analogique en filtre numérique

Disposant désormais d'outils analogiques, nous cherchons à déterminer leurs homologues numériques. Nous exposons la méthode d'invariance à l'impulsion et la méthode de transformation bilinéaire pour la synthèse des filtres RII.

4.4.1 Invariance à l'impulsion

C'est la méthode la plus naturelle qui soit. Soit $h_a(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre à transformer. On construit son équivalent numérique en choisissant le filtre dont la réponse impulsionnelle est l'échantillonnage de $h_a(t)$, soit $(h_n) = (h_a(n))$ si $f_e = 1\text{Hz}$. Si la fonction de transfert $H_a(s)$ n'a que des pôles simples et une région de convergence à gauche :

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}.$$

On a alors :

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k u(t) e^{s_k t}.$$

On en déduit (h_n) puis $H(z)$:

$$h_n = \sum_{k=1}^N A_k u_n e^{s_k n},$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k} z^{-1}}.$$

On peut remarquer que les pôles de $H_a(s)$, e^{s_k} , sont directement liés aux pôles de $H(z)$. La stabilité de H_a garantit la stabilité de H . La réponse en fréquence de H est liée à celle de H_a par la relation classique de l'échantillonnage (rappelons que $f_e = 1\text{Hz}$) :

$$H(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_a(\nu - n).$$

Pour éviter le recouvrement spectral (en théorie toujours présent dans ce cas de pôles simples), cette méthode ne pourra être valable que lorsque H_a est un filtre passe-bas ou passe-bande très sélectif. En particulier, il sera impossible de synthétiser un filtre passe-haut avec une telle méthode. La méthode a tout de même pour avantage de ne pas déformer la réponse en fréquence du filtre analogique.

4.4.2 Transformation bilinéaire

On cherche maintenant une méthode qui permet de faire correspondre l'axe des fréquences analogiques à l'axe des fréquences numériques (dont on ne s'intéressera qu'à la période $[-1/2, 1/2]$), tout en évitant le repliement spectral. La transformation bilinéaire résout ce problème.

On utilise le fait que la fonction³ $\phi(u) = \frac{1}{\pi} \tan \pi u$ réalise une bijection de $] -1/2, 1/2[$ dans $\mathbb{R}$, et que sa fonction réciproque est $\phi^{-1}(v) = \frac{1}{\pi} \arctan \pi v$. Soit $\hat{H}_a(\nu)$ la réponse en fréquence du filtre analogique, et $H_a(s)$ sa fonction de transfert. On considère le filtre dont la réponse en fréquence est donnée par $\hat{H}(\nu) = \hat{H}_a(\phi(\nu))$. Puisque $\hat{H}(\nu)$ est 1-périodique, ce filtre est bien un filtre discret. Cherchons alors sa fonction de transfert $H(z)$.

Puisque $\hat{H}(\nu) = H(e^{2i\pi\nu})$ et que $\hat{H}_a(\nu) = H_a(2i\pi\nu)$, on obtient la relation suivante :

$$H(e^{2i\pi\nu}) = H_a(2i\pi\phi(\nu)).$$

3. Remarquer que $\phi(u) \approx u$ pour u petit : le spectre à basses fréquences est peu déformé.

Or

$$2i\pi\phi(\nu) = 2i \tan(\pi\nu) = 2 \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{1 + e^{-2i\pi\nu}}.$$

Donc nécessairement :

$$H(e^{2i\pi\nu}) = H_a\left(2 \frac{1 - e^{-2i\pi\nu}}{1 + e^{-2i\pi\nu}}\right).$$

Une condition suffisante pour que cette relation soit satisfaite est :

$$H(z) = H_a\left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = H_a(s) \Big|_{s=2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

La démarche de synthèse d'un filtre numérique passe-bas de fréquence de coupure f_c en utilisant une transformation bilinéaire est donc la suivante :

- calculer la fréquence de coupure f_a du filtre analogique ($f_e = 1$ Hz) par la formule de passage fréquence numérique-fréquence analogique $f_a = \phi(f_c) = \frac{1}{\pi} \tan(\pi f_c)$,
- chercher la fonction de transfert $H_a(s)$ du filtre analogique avec la fréquence de coupure f_a trouvée et satisfaisant au gabarit souhaité.
- en déduire la fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique par la formule $H(z) = H_a(s)$ en remplaçant s par $2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

La transformation bilinéaire permet donc de transporter les propriétés d'un filtre analogique au domaine numérique, sans crainte de recouvrement spectral, mais au prix d'une déformation de l'axe des fréquences de type arctangente.

4.5 Filtres RIF : spécificités

Les méthodes que nous avons proposées jusqu'ici répondent aux contraintes imposées au spectre d'énergie du filtre, mais ne proposent pas de solution si l'on spécifie des contraintes sur la phase de sa réponse en fréquence. Les filtres RIF peuvent être synthétisés de manière à ce que leur phase soit linéaire ($\arg(H(\nu)) \propto \nu$), permettant ainsi à un signal inclus dans la bande passante d'être transmis intégralement sans déformation mais au prix d'un délai. Utiliser des filtres RIF permet également d'utiliser le filtrage par FFT. Nous ne donnons ici qu'une technique de synthèse de filtre par TFD en utilisant le principe de l'invariance à l'impulsion (cf. document complémentaire accessible en ligne).